

Formule della circonferenza con il passaggio al limite

Marco Barbato

9 novembre 2021

Sommario

Ricavo la dipendenza del lato e dell'apotema per un generico poligono regolare inscritto in una circonferenza di raggio R . E, infine, perimetro e area con un passaggio al limite.

Costruiamo la formula della relazione lunghezza della circonferenza e dell'area da essa racchiusa mediante passaggio al limite delle lunghezze dei perimetri e delle aree dei poligoni regolari inscritti alla circonferenza di raggio R , per un numero crescente di lati.

Mettendo in relazione gli apotemi e i lati delle figure con il numero di lati progressivamente crescente, si può trovare la successione monotona crescente che tende alle formule note.

Teorema 1. *In un poligono regolare gli angoli al vertice (eguali tra loro) sono determinati dall'espressione*

$$\alpha = 2\theta = \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad (1)$$

Dimostrazione. Per un triangolo la somma degli angoli al vertice è un angolo piatto; l'incrocio delle altezze divide l'angolo giro in un angolo di $2\pi/3 = 2\pi/n$ (per un poligono di n lati). Si veda la Fig. 1.

Per un quadrato, la somma degli angoli al vertice si può ricavare essere 2π .

Per ogni figura con numero di lati $n \geq 4$ si può suddividere la figura in n triangoli isosceli in cui l'angolo al vertice coincidente con il centro è $2\pi/n$ e gli angoli opposti valgono ciascuno $(\pi - 2\pi/n)/2$

□

Per un triangolo isoscele, le equazioni che legano il raggio R della circonferenza circoscritta all'angolo al vertice α e all'apotema a (distanza del centro da ognuno dei lati) si ricavano dalle relazioni trigonometriche; tuttavia dalle figure si possono facilmente ricavare le espressioni generali per poligoni regolari a $n \geq 3$ lati:

$$l_n = 2R \cos \theta = 2R \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \quad (\text{lato}) \quad (2)$$

$$a_n = R \sin \theta = R \sin \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \quad (\text{apotema}) \quad (3)$$

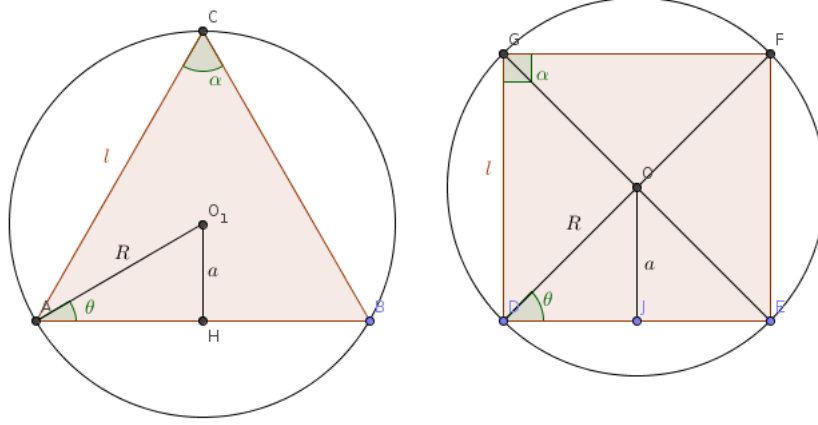


Figura 1: Relazione tra angolo al vertice, apotema e raggio per poligoni regolari inscritti in una circonferenza.

L'andamento è illustrato in Fig. 2 in cui $R = 1$.

Qualitativamente l'apotema tende al raggio R ed il lato tende a 0.

Il perimetro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \quad (4)$$

e l'area

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} a_n l_n = \frac{1}{2} 2R^2 \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \sin \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \quad (5)$$

Utilizzando le formule di sottrazione del coseno e del seno si ha:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (6)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (7)$$

$$2p = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \frac{\pi}{n} = 2\pi R \quad (8)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a_n l_n}{2} = nR^2 \frac{\pi}{n} = \pi R^2 \quad (9)$$

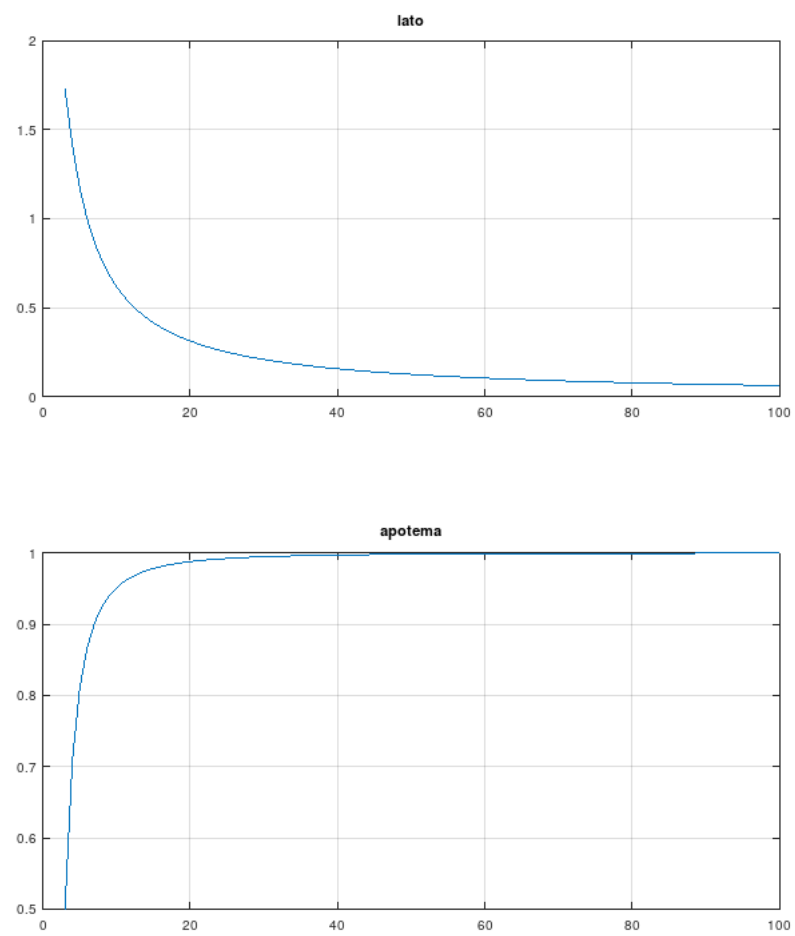


Figura 2: Andamenti del lato e dell'apotema